❶ 座標空間内の 8 点 $(0,\ 0,\ 0)$, $A(2,\ 0,\ 0)$, $B(2,\ 2,\ 0)$, $C(0,\ 2,\ 0)$, $P(0,\ 0,\ 1)$, $Q(2,\ 0,\ 1)$, $R(2,\ 2,\ 1)$, $S(0,\ 2,\ 1)$ を頂点とする直方体を考える。次の各問に答えよ。

(1) $D=(x,\ y,\ 1)$ を面 $PQRS$ 上の点とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $x,\ y$ および $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ と直交するための条件を $x,\ y$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ である D の中で $|\overrightarrow{OD}|$ が最小となるような D を与える $x,\ y$ の値を求めよ。

❷ $0<a<4$ とし、座標平面上の 4 点 $(0,\ 0)$, $(a,\ 0)$, $(a,\ 4-a)$, $(0,\ 4-a)$ を頂点とする長方形の内部を I_a とする。$y \leqq \dfrac{1}{x}$ を満たす I_a の点 $(x,\ y)$ 全体のなす図形の面積を $S(a)$ とするとき、次の各問に答えよ。

(1) $S(a)$ を a を用いて表せ。

(2) $S(a)$ の最大値を求めよ。

❸ 次の各問に答えよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくとき、AB_1-B_1A と AB_2-B_2A を計算せよ。

(2) 3×3 行列 A で、任意の 3×3 行列 B に対して、$AB=BA$ を満たすものを全て求めよ。

❹ $0<x<\dfrac{1}{2}$ とする。一辺の長さが 1 の正方形の紙の 4 すみから一辺の長さが x の正方形を切り取りふたのない箱 A を作る。さらに、切り取った一辺の長さが x の正方形の 4 すみをそれぞれ切り取り、A と相似なフタのない箱 $B_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ を作る。次の各問に答えよ。

(1) 箱 A の容積 $f(x)$ を最大にする x の値 a を求めよ。

(2) 箱 B_1 の容積 $g(x)$ を最大にする x の値 b を求めよ。

(3) 方程式 $f'(x)+4g'(x)=0$ が区間 $a<x<b$ に解を持つ事を示せ。

❺ A 地点から B 地点まで 0 または 1 の一文字からなる信号を送る。A 地点と B 地点の間に中継点を $2n-1$ 箇所作り AB 間を $2n$ 個の小区間に分割すると、一つの区間において 0 と 1 が逆転して伝わる確率は $\dfrac{1}{4n}$ である。このとき A 地点を発した信号 0 が B 地点に 0 として伝わる確率を P_{2n} とする。次の各問に答えよ。

(1) 偶数回の逆転があると、A 地点で発した信号 0 が、B 地点に 0 として伝わる事に注意し P_2 を求めよ。

(2) $(a+b)^{2n}+(a-b)^{2n}=2\sum\limits_{k=0}^{n} {}_{2n}C_{2k}a^{2n-2k}b^{2k}$ を示せ。

(3) P_{2n} を求めよ。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} P_{2n}$ を求めよ。