

**1** 正の整数  $n$  を 8 で割った余りを  $r(n)$  とおく。正の整数の組  $(a, b)$  は条件  $0 < a - r(a) < \frac{4}{3}r(b)$ ,  $0 < b - r(b) < \frac{4}{3}r(ab)$  を満たすとする。

(1)  $a - r(a)$  と  $r(b)$  を求めよ。

(2)  $a, b$  を求めよ。

**2** 数列  $\{a_n\}$  を  $a_1 = 5, a_{n+1} = 2a_n + 3^n(n-1, 2, \dots)$  で定める。

(1)  $b_n = a_n - 3^n$  とおく。  $b_{n+1}$  を  $b_n$  で表せ。

(2)  $a_n$  を求めよ。

(3)  $a_n < 10^{10}$  を満たす最大の正の整数  $n$  を求めよ。

ただし、 $\log_{10}2 = 0.3010, \log_{10}3 = 0.4771$  としてよい。

**3**  $ABC$  の 3 辺  $BC, CA, AB$  を  $t : 1 - t$  の比に内分する点をそれぞれ  $A_1, B_1, C_1$  とおき、  $A_1B_1C_1$  の 3 辺  $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$  を  $t : 1 - t$  の比に内分する点をそれぞれ  $A_2, B_2, C_2$  とおく。ただし、 $0 < t < 1$  とする。

(1)  $A_2B_2C_2$  の辺  $B_2C_2$  が  $ABC$  のいずれかの辺と平行となる  $t$  の値を求めよ。

(2) (1) のとき、  $A_2B_2C_2$  は  $ABC$  に相似であることを示し、その相似比を求めよ。

**4** 放物線  $y = x^2$  上の点  $A(a, a^2)$  における接線  $\ell$  と、点  $B(b, b^2)$  における接線  $m$  との交点を  $C$  とおく。ただし、 $a < b$  とする。

(1) 2 直線  $\ell, m$  と放物線  $y = x^2$  とで囲まれる部分の面積  $S$  を  $a$  と  $b$  で表せ。

(2) 点  $C$  が放物線  $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$  上を動くときの面積  $S$  の最小値を求めよ。

**5**  $H$  大学には 4 つの食堂があり、 $A$  君と  $B$  さんは、それぞれ毎日正午に、前日とは異なる 3 つの食堂のうち 1 つを無作為に選んで昼食をとることにしている。最初の日、二人は別々の食堂で食事をしたとして、以下の確率を求めよ。

(1)  $n$  日後に、はじめて二人が食堂で出会う確率。ただし  $n \geq 1$  とする。

(2)  $n$  日後に、二人が食堂で出会うのがちょうど 2 回目である確率。ただし、 $n \geq 2$  とする。