一橋大学　前期日程 1996 年　　数学

1

(1)2 つの自然数の組 (a, b) は条件 $a < b$ かつ $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{4}$ を満たす。このような組 (a, b) のうち、b の最も小さいものを全て求めよ。

(2)3 つの自然数の組 (a, b, c) は、条件 $a < b < c$ かつ $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{3}$ を満たす。このような組 (a, b, c) のうち、c の最も小さいものを全て求めよ。

2 旧課程により省略。

3 y 軸上の点 $(0, a)$ を中心とする半径 r の円は、放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ と異なる 2 つの点で接する。すなわち、2 つの共有点を持ち、おのおのの共有点で、円に引いた接線と放物線に引いた接線とが一致する。

(1)このような円が存在する r の範囲を求めよ。

(2)a を r で表せ。

(3)$r = 2$ のとき、円と放物線とで囲まれる部分の面積を求めよ。

4 三角錐 $ABCD$ が△ BCD を底面にして机の上に置かれている。辺の長さをそれぞれ $AB = 1,\ AC = \sqrt{2},\ AD = \sqrt{5},\ BC = \sqrt{3},\ BD = \sqrt{6},\ CD = 3$ とする。

(1)三角錐 $ABCD$ の体積を求めよ。

(2)三角錐 $ABCD$ を、辺 CD を軸として、頂点 A が机につくまで回転させるとき、三角錐が通過する部分の体積を求めよ。

5 正四面体 $ABCD$ の辺上を動くアリは、頂点を訪れた 1 秒後に他の頂点のいずれかをおのおの確率 $\dfrac{1}{3}$ で訪れる。最初に頂点 A にいるアリをその n 秒後まで観察する。

(1)頂点 A, B は訪れているが、頂点 C, D は訪れていない確率 p_n を求めよ。

(2)頂点 A, B, C は訪れているが、頂点 D は訪れていない確率 q_n を求めよ。

(3)全頂点を訪れている確率 r_n を求めよ。

　ただし、(1)(2)(3)とも、最初にいる頂点 A は訪れた頂点として考える。