数学演習　第１０回

山田　良太
大阪府立大学・理学部・情報数理科学科

10.1

$f^{(4)}(x) = (81x^2 + 216x + 108)e^{3x}$

10.2

$g^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin(x + \frac{n}{4}\pi$ 　　$\star$

・$n = 1$ のとき

$g'(x) = e^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^x \sin(x + \frac{pi}{4})$ より成立。

・$n = k$ のとき、$\star$ が成立すると仮定すると、$n = k + 1$ のとき、

$g^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx}g^{(k)}(x) = (\sqrt{2})^k e^x \sin(x + \frac{k}{4}\pi) + (\sqrt{2})^k e^x \cos(x + \frac{k}{4}\pi) = (\sqrt{2})^k e^x \sqrt{2} \sin(x + \frac{k}{4}\pi + \frac{pi}{4}) =$
$(\sqrt{2})^{k+1} e^x \sin(x + \frac{k+1}{4}\pi$

より帰納法によって $\star$ は示された。

10.3

（1）$h'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

（2）$h'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin x = 0$

よって $h(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $h'(0) = 0$

（3）$\lim_{x \to 0} h'(x) \fallingdotseq h'(x) = 0$ を示す。

先ず、$\lim_{x \to 0} 2x \sin\frac{1}{x} = 0$ なので、

$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = -\lim_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$

$t = \frac{1}{x}$ とすれば、$-\lim_{x \to 0} \cos\frac{1}{x} = -\lim_{t \to \pm\infty} \cos t$ は振動する。つまり、$\lim_{x \to 0} \cos\frac{1}{x} \fallingdotseq 0$

よって、$\lim_{x \to 0} h'(x) \fallingdotseq h'(0)$ より、C^1 級の関数では無い。

10.4

（1）$f^{(0)}(0) = \sin 0 = 0,\ f^{(1)}(0) = \cos 0 = 1,\ f^{(2)}(0) = -\sin 0 = 0,\ f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1$

（2）$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{\sin\theta x}{4!}x^4$

10.5

メンドクセーーー