数学演習　第９回

山田　良太
大阪府立大学・理学部・情報数理科学科

9.1

（1）$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,　$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

（2）A^2 は $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$ のときのみ存在し、${}^tA$ は常に存在する。

（3）$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}$,　$(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (B)_{ik}(B)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}$

（4）$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj} = (A)_{ij}\lambda_j = \lambda_j a_{ij}$,　$(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (B)_{ik}(A)_{kj} = (A)_{ij}\lambda_i = \lambda_i a_{ij}$

9.2

$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ とすると、$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n}$ とかける。

f が線型性を持つ事より

$f(\boldsymbol{v}) = a_1 f(\boldsymbol{e_1}) + a_2 f(\boldsymbol{e_2}) + \cdots + a_n f(\boldsymbol{e_n}) = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e_1}) & f(\boldsymbol{e_2}) & \cdots & f(\boldsymbol{e_n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e_1}) & f(\boldsymbol{e_2}) & \cdots & f(\boldsymbol{e_n}) \end{bmatrix} \boldsymbol{v}$

で、$A = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e_1}) & f(\boldsymbol{e_2}) & \cdots & f(\boldsymbol{e_n}) \end{bmatrix}$ とおけば、A は (m, n) 型行列で、確かに $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ となる。

9.3

（1）2つの対角行列を $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, $B = diag(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ とおく。

$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \lambda_i\mu_i & i = j \end{cases}$

より、$(AB)_{ij}$ は $i \neq j$ のとき、0 なので、確かに対角行列である。

（2）2つの上三角行列を

$(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \leqq j \\ 0 & i > j \end{cases}$, $(B)_{ij} = \begin{cases} b_{ij} & i \leqq j \\ 0 & i > j \end{cases}$ とおく。

$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj}$

ここで、$i > j$ ならば全ての $k(1 \leqq k \leqq n)$ に対して $i > k$ または $k > j$ が成立する。

故に、$(AB)_{ij}$ は $i > j$ であれば 0 なので確かに上三角行列である。

9.4

（1）必要十分条件は全ての $i(1 \leqq i \leqq n)$ で $\lambda_i \neq =$ である。

このことを n に関する帰納法で示す。

・$n = 1$ のとき $A = \begin{bmatrix} \lambda_i \end{bmatrix}$ より、$\lambda_i \neq 0$ ならば $B = \begin{bmatrix} \lambda_i^{-1} \end{bmatrix}$ で $AB = E$ より、A は逆行列を持つ。

・$n = k$ のとき、$(1 \leqq i \leqq k$ なる i で、$\lambda_i \neq 0$ ならば $A_kB_k = E$ なる B_k が存在するとする。

$n = k + 1$ のとき、$\begin{bmatrix} A_k & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \lambda_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_k & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \lambda_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_kB_k & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{bmatrix} = E$

より、$n = k + 1$ でも $\lambda_{k+1} \neq 0$ であれば A_{k+1} は逆行列を持つ。

以上より、対角行列が逆行列を持つための必要十分条件は全ての $i(1 \leqq i \leqq n)$ で $\lambda_i \neq = 0$ であり、その逆行列は $diag(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1})$ である。