8. 1

（１）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在すること。

（２）全ての $a\in I$ で $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在すること。

8.2

（ｉ）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ は振動するので、極限値は存在しない。
よって微分不可能。

（ii）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$
よって、極限値が存在するので、微分可能。

8.3

（ｉ）$\displaystyle\frac{d}{dx}\log_2 x=\frac{d}{dx}\frac{1}{\log 2}\cdot\log x=\frac{1}{\log 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{x\log 2}$　　$\therefore$　$\displaystyle\boldsymbol{\frac{d}{dx}\log_2 x=\frac{1}{x\log 2}}$……(**答**)

（ii）$\displaystyle\frac{d}{dx}\log_x 2=\frac{d}{dx}\frac{\log 2}{\log x}=-\frac{\frac{1}{x}\log 2}{(\log x)^2}=-\frac{\log 2}{x(\log x)^2}$　　$\therefore$　$\displaystyle\boldsymbol{\frac{d}{dx}\log_x 2=-\frac{\log 2}{x(\log x)^2}}$……(**答**)

8.4

それぞれ $L'hospital$ の定理を用いる。

（ｉ）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0$　　$\therefore$　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=0}$……(**答**)

（ii）$y=x^{\frac{1}{x}}$ とおく。このとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log y=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$　　$\therefore$　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}y=1}$……(**答**)

8.5

（１）$\arccos x=y$ とおくと、$x=\cos y$

$\displaystyle\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0<y<\pi$ より、$0<\sin y)$

（２）$\arctan x=y$ とおくと、$x=\tan y$

$\displaystyle\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$

（３）$\tanh^{-1}x=y$ とおくと、$\displaystyle x=\tanh y=\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$

$\displaystyle\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{4}{(e^y+e^{-y})^2}}=\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)^2=\cosh^2 y=\frac{1}{1-\tanh^2 y}=\frac{1}{1-x^2}$