数学演習Ｉ
２００６年４月２１日実施

1060301034　山田良太
理学部情報数理科学科　１回生

http://www.geocities.jp/ryota_yama_2006/study/study.html

平成 18 年 5 月 9 日

0.1

1. (a) すべての A の要素 x について $x \leq a$ が成立すること　かつ
   (b) すべての A の要素 x について $x \leq b$ が成立すれば $a \leq b$ が成立すること

2. (a) 全ての A の要素 x について $a \leq x$ が成立すること
   (b) 集合 A の下界が存在すること。
   (c) a は A の要素で、かつ A の上界であること。
   (d) a が A の下界全体の集合の最小数である。

0.2

1. $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 < 4\} = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 2\}$ より全ての $a \in A$ に対して $-2 < a < 2$ ゆえに $a \leq 2$ が成立する
   ゆえに、2 は A の上界である。　　QED

2. $A = \doteqdot\{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 2\}$ より $2 \notin A$ である。ゆえに 2 は A の最大数ではない。　　QED

3. $A = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 2\}$ より

4. まず 1. より 2 は A の上界である。
   更に A の上界の成す集合を B とすると、すべての $b \in B$ に対して $b \leq 2$ が成立する。
   ゆえに 2 は A の上限である。　　QED

0.3

1. ア）$n = 1$ のとき、$c_1 \leq 1$ は明らか
   イ）$n = k$ のとき、$c_k \leq 1$ を仮定する。
   $n = k + 1$ のとき、$c_{k+1} = \dfrac{1 + c_k^2}{2} \leq \dfrac{1+1}{2} = 1$
   よって $n = k$ の下で $n = k + 1$ の時も成立する。
   ア）イ）より数学的帰納法により全ての n に対して $c_n \leq 1$ である。

2. ア）$n = 1$ のとき
   $c_2 - c_1 = \dfrac{1 + c_1^2}{2} - c_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}c_1^2 > 0$
   より $c_1 < c_2$ である。

3. イ）$n \geq 2$ のとき、
$c_{n+1} - c_n = \dfrac{1 + c_n^2}{2} - c_n = \dfrac{1}{2}(c_n - 1)^2 > 0$
より $n \geq 2$ のとき、c_n は単調増加である。
ア) イ) よりり、すべての n について c_n は単調増加である。 QED

4. 1.2. より数列 $\{c_n\}$ は上に有界で単調増加数列である。
よってこの数列 $\{c_n\}$ は収束する。

5. 4. よりこの数列 $\{c_n\}$ は収束するので、$\lim_{x\to\infty} c_{n+1} = \lim_{x\to\infty} c_n = x$ と置ける。
よって $x = \dfrac{1 + x^2}{2}$
これを解いて $x = 1$ である。よって $\lim_{x\to\infty} c_n = 1$ となる。 QED

0.4

誤り：この数列が収束するかどうかはまだ分からないので $\lim_{n\to\infty} d_n = d$ と置くことはできない。

0.5

1. $\varepsilon > 0$ に対して N を $\dfrac{1}{\varepsilon} < N$ となる自然数とする。
$n \geq N$ なら $|a_n - a| = \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{N} < \varepsilon$
よって $|a_n - a| < \varepsilon$
故に $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ QED

2. $\varepsilon > 0$ に対して N を $\dfrac{1}{\varepsilon^2} < N$ となる自然数とする。
$n \geq N$ なら $|b_n - b| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon$
よって $|b_n - b| < \varepsilon$
故に $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ QED

3. $\varepsilon > 0$ に対して N を $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$ となる自然数とする。
$|\sin n| < 1$ であるから
$n \geq N$ なら $|c_n - c| = \left|\dfrac{\sin n}{n} - 0\right| = \dfrac{|\sin n|}{n} \leq \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{N} < \varepsilon$
よって $|c_n - c| < \varepsilon$
故に $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ QED