数学演習

1060301034　　山田　良太

２００６年4月１４日

1

1.1

（　）左辺 $= \boldsymbol{A(v+w)} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p+r \\ q+r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+ar+bq+br \\ cp+cr+dq+dr \end{bmatrix}$

（　）右辺 $= \boldsymbol{Av+Aw} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+ar+bq+br \\ cp+cr+dq+dr \end{bmatrix}$

よって左辺＝右辺より題意は成り立つ　QED

1.2

（　）左辺 $= \boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} \lambda p \\ \lambda q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda p \\ \lambda q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\lambda p + b\lambda q \\ c\lambda p + d\lambda q \end{bmatrix}$

（　）右辺 $= \lambda \boldsymbol{Av} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda ap + \lambda bq \\ \lambda cp + \lambda dq \end{bmatrix}$

よって左辺＝右辺より題意は成り立つ　QED

2

2.1

$trivial \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

2.2

$\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とすると、この変換により、$\boldsymbol{e_1}$ は $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ に、$\boldsymbol{e_2}$ は $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ に、移動する。よってこれらより求める変換を表す行列 $\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2.3

$$\boldsymbol{CB} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2.4

$$\boldsymbol{CB} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$$

この変換を表す行列 $\boldsymbol{CB}$ は回転角 $\frac{\pi}{3}$ の回転を表す。

3

3.1

$$f_D(\boldsymbol{e_1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f_D(\boldsymbol{e_2}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.2

$$f_D\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x+y \end{bmatrix}$$

3.3

E 上の点 $P(X,Y)$ が線型変換 f_D によって写される点を $Q(x,y)$ とする。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+y \end{bmatrix}$$

更に $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ であるから、$0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$

よって E は f_D によって 2 点 $(0,0)(2,2)$ を結ぶ線分に写される。

（長さ $2\sqrt{2}$，傾き 1）

4

線型変換 f を表す行列を $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，2 次元縦ベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ とする。

$$f(\boldsymbol{v}) + f(-\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \\ -q \end{bmatrix} = \boldsymbol{\cdots} = \boldsymbol{O}$$