1.

（1）

$x = a\tan\theta$ とおくと、$dx = a\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \int \frac{1}{a^2(1+\tan^2\theta)}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int \frac{1}{a}d\theta = \frac{\theta}{a} = \boldsymbol{\frac{1}{a}\arctan\frac{|x|}{a}} \cdots\cdots(\text{答})$$

（2）

a) $x = |a|\sin\theta$ とおくと、$dx = |a|\cos\theta$ より、

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{1}{|a|\sqrt{1-\sin^2\theta}}|a|\cos\theta d\theta = \int d\theta = \theta = \boldsymbol{\arcsin\frac{x}{|a|}} \cdots\cdots(\text{答})$$

b) $x = |a|\cos\theta$ とおくと、$dx = -|a|\sin\theta$ より、

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{1}{|a|\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-|a|\sin\theta)d\theta = \int(-1)d\theta = -\theta = \boldsymbol{-\arccos\frac{x}{|a|}} \cdots\cdots(\text{答})$$

（3） $\sqrt{x^2+a} = t - x$ を x で微分すると、

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{dt}{dx} - 1$$ より、$$dx = \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}+1}dt = \frac{t-x}{t}dt$$ なので、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{1}{t-x}\frac{1-t}{t}dt = \int \frac{1}{t}dx = \log|t| + C = \boldsymbol{\log|x+\sqrt{x^2+a}|} \cdots\cdots(\text{答})$$

2.

（1）

a) $$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1}{1+\sin x}\frac{1-\sin x}{1-\sin x}dx = \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx = \boldsymbol{\tan x + \frac{1}{\cos x}} \cdots\cdots(\text{答})$$

b) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと、$dt = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cos^2 x/2}dx = \dfrac{1}{2}(1+\tan^2 x/2)dx$ であり、

$\sin x = \sin 2\cdot\dfrac{x}{2} = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 2\tan\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2} = \dfrac{2t}{1+t^2}$ であるから、

$$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{1}{\frac{1}{2}(1+t^2)}dt = \int 2t^2+2t+1dt = -\frac{2}{t+1} = \boldsymbol{-\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1+1}} \cdots\cdots(\text{答})$$

（2）

a) $e^x = \tan\theta$ とおくと、$e^x dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ なので、

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{2e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{2e^x}{\tan^2\theta+1}\frac{1}{e^x\cos^2\theta}d\theta = \int 2d\theta = 2\theta = \boldsymbol{2\arctan e^x} \cdots\cdots(\text{答})$$

b)

（3）

a) $t = \sqrt{x-1}$ とすると、$2tdt = dx$ なので、

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx = \int \frac{2t}{t\sqrt{1-t^2}}dt = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

ここで、$t = \cos\theta$ とすれば、$dt = -\sin\theta d\theta$ なので、

$$2\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-\sin\theta)d\theta = 2\int(-1)d\theta = -2\theta = -2\arccos t = \boldsymbol{-2\arccos\sqrt{x-1}} \cdots\cdots(\text{答})$$

b)

3.

（1） $$\int x\log(1-x)dx = \int (\frac{1}{2}x^2)'\log(1-x)dx = \frac{1}{2}x^2\log(1-x) - \int \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log(1-x) + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x-1}dx = \frac{1}{2}x^2\log(1-x) + \frac{1}{2}\int(x+1+\frac{x-1}{)})dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log(1-x) + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\log|x-1| = \boldsymbol{\frac{1}{2}(x^2+1)\log|x-1| + \frac{1}{2}x(\frac{1}{2}x+1)} \cdots\cdots(\text{答})$$

（2） $\dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ であるから

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \int \left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx = \mathbf{\log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x+1}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

（3） $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+1}$

ここで、$x-1=\tan\theta$ とすると、$dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であるから、

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2+1)} = \int \frac{1}{\tan^2\theta+1}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int d\theta = \theta = \mathbf{\arctan(x-1)} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

（4） $I_n = \displaystyle\int \frac{(\log x)^n}{x}dx$ とする。

$I_n = \displaystyle\int (\log x)'(\log x)^n dx = (\log x)^{n+1} - \int (\log x)n(\log x)^{n-1}\frac{1}{x}dx$

$= (\log x)^{n+1} - n\displaystyle\int \frac{(\log x)^2}{x}dx = (\log x)^{n+1} - nI_n$

よって、$I_n = (\log x)^{n+1} - nI_n$ なので、

$$\therefore \quad I_n = \int \frac{(\log x)^n}{x}dx = \mathbf{\frac{(\log x)^{n+1}}{n+1}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

（5） $t=(e^x+1)^{1/4}$ とおくと、$dt = \dfrac{1}{4}e^x(e^x+1)^{-3/4}dx$ から $dx = \dfrac{4(e^x+1)^{3/4}}{e^x}dt$ だから

$\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{(x^2+1)^{1/4}}dx = \int \frac{(e^x)^2}{(e^x+1)^{1/4}}\frac{4(e^x+1)^{3/4}}{e^x}dt = \int e^x 4(e^x+1)^{1/2}dt = 4\int e^x + t^2 dt$

$= 4\displaystyle\int (t^4-1)t^2 dt = 4\int (t^6-t^2)dt = 4\Big(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{3}t^3\Big) = \frac{4}{21}t^3(3t^4-7) = \mathbf{\frac{4}{21}(e^x+1)^{3/4}(3e^4-4)} \cdots\cdots(\textbf{答})$

（6） $t = \dfrac{1}{x}$ とおくと、$dx = -x^2 dt$ なので、

$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-3}} = \int \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{1}{t^2}-3}}(-x^2)dt = \int \frac{\pm t}{\sqrt{1-3t^2}}dt = \pm\frac{1}{6}\int \frac{6t}{\sqrt{1-3t^2}}dt$

$= \pm\dfrac{1}{6}\sqrt{1-3t^2} = \pm\dfrac{1}{6}\sqrt{1-3(\frac{1}{x})^2} = \mathbf{\pm\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{6x}} \cdots\cdots(\textbf{答})$

4.

（1） $x = a\sin\theta$ とおくと、$dx = a\cos\theta d\theta$ であるから、

$\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a\int \sqrt{1-\sin^2\theta}(a\cos\theta)d\theta = a^2\int \cos^2\theta d\theta = \frac{a^2}{2}\int (\cos 2\theta + 1)d\theta$

$= \dfrac{a^2}{2}\Big(\dfrac{1}{2}\sin 2\theta + \theta\Big) = \dfrac{1}{2}\Big(a^2\sin\theta\cos\theta + a^2 \arcsin\dfrac{x}{|a|}\Big)$

$= \dfrac{1}{2}\Big\{(a\sin\theta)\sqrt{a^2-a^2\sin\theta} + a^2\arcsin\dfrac{x}{|a|}\Big\} = \dfrac{1}{2}\Big(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\dfrac{x}{|a|}\Big)$

$$\therefore \quad \int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{|a|}\Big)$$

（2）

5.

（1） 部分積分を随時行うことにより示す。

$I(m,n) = \displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ とおく。 …… ①

$I(m,n) = \displaystyle\int_0^1 \Big(\frac{1}{m+1}x^{m+1}\Big)'(1-x)^n dx = \Big[\frac{1}{m+1}x^{m+1}(1-x)^n\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{m+1}x^{m+1}n(-1)(1-x)^{n-1}dx$

$= \dfrac{n}{m+1}\displaystyle\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx = \frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)$

よって、

$$I(m,n) = \frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)$$

これから

$I(m,n) = \dfrac{n}{m+1}I(m+1,n-1) = \dfrac{n}{m+1}\dfrac{n-1}{m+2}I(m+2,n-2)$

$$= \cdots = \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} I(m+n,\, 0) = \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} \int_0^1 x^{m+n} dx$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} \left[\frac{1}{m+n+1} x^{m+n+1} \right]_0^1 = \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} \times \frac{1}{m+n+1}$$

$$= \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n+1)} \times \frac{m!}{m!} = \frac{n!m!}{(m+n+1)!}$$

$$\therefore \quad I(m,\, n) = \frac{n!m!}{(m+n+1)!}$$