2.6a

$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$

$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1) = \frac{1}{n^3}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\frac{1}{2}n(n+1)+n\right\} = \frac{n}{6n^3}\left\{(n+1)(2n+1)-6(n+1)+6\right\}$

$= \frac{1}{6n^2}(2n^2+3n+1-6n) = \frac{1}{6n^2}(2n^2-3n+1) = \boldsymbol{\frac{1}{6n^2}(2n-1)(n-1)}$……**(答)**

$T_n = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$

$= \frac{1}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \boldsymbol{\frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1)}$……**(答)**

2.7b

$t_n \leqq s(f)$ について先ず考える。

$s'(f)$ を $s(f,\delta)$ の δ が n 等分分割のときと仮定する。

すると、$s(f) = \sup\{s(f,\delta)|\delta$ は $[0,1]$ の分割 $\}$ であるから、

$s'(f) \leqq s(f)$

となる。またこのとき、$s'(f) = t_n$ でもあるから

$t_n = s'(f) \leqq s(f)$

$\therefore\quad t_n \leqq s(f)$

$S(f) \leqq T_n$ のときを考える。

$S'(f)$ を $S(f,\delta)$ の δ が n 等分分割のときと仮定する。

すると、$S(f) = \inf\{S(f,\delta)|\delta$ は $[0,1]$ の分割 $\}$ であるから、

$S'(f) \geqq S(f)$

となる。またこのとき、$S'(f) = T_n$ であるから、

$T_n = S'(f) \geqq S(f)$

$\therefore\quad T_n \geqq S(f)$

2.7c

$t = \sup\{t_n|n\in\mathbb{N}\} = \sup\{\frac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1)|n\in\mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1) = \frac{1}{3}$

$T = \inf\{T_n|n\in\mathbb{N}\} = \inf\{\frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1)|n\in\mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3}$

2.7d

b より、$t_n \leqq s(f) \leqq S(f) \leqq T_n$ であり、さらに **c** より

$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{3}$

であるからハサミウチの原理により

$n\to\infty$ のとき $s(f) = S(f)$

ゆえに f は $[0,1]$ で積分可能であり

$\int_0^1 f(x)dx = s(f) = S(f) = \frac{1}{3}$